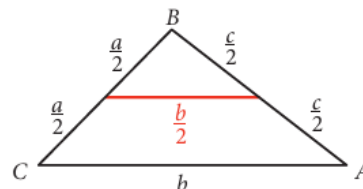


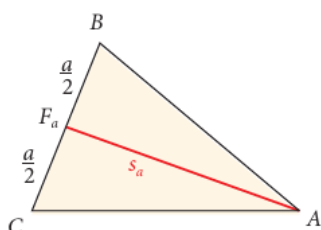
HÁROMSZÖG KÖZÉPVONALAI ÉS SÚLYVONALAI, MAGASSÁGTÉTEL, BEFOGÓTÉTEL

ELMÉLET

Ha összekötjük egy háromszög két oldalának a felezőpontját, akkor a háromszög egyik **középvonalát** kapjuk meg. Bizonyítható, hogy ez a középvonal párhuzamos a háromszög harmadik oldalával, és feleolyan hosszú, mint ez az oldal. Minden háromszögnek három középvonala van.



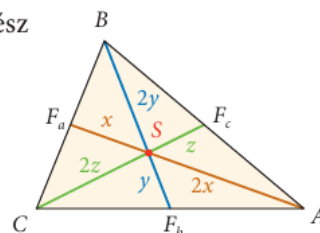
ELMÉLET



Ha összekötjük egy háromszög egyik csúcsát a vele szemközti oldal felezőpontjával, akkor a háromszög egyik **súlyvonalát** kapjuk meg (az ábrán az A csúcshoz tartozó súlyvonalat rajzoltuk meg). Minden háromszögnek három súlyvonala van.

Igaz a következő két állítás:

- Két súlyvonal 2 : 1 arányban osztja egymást, a hosszabbik rész csatlakozik a csúcshoz.
- Egy háromszög három súlyvonala egy pontban metszi egymást. Ezt a közös pontot a háromszög **súlypontjának** nevezzük. A súlyvonal a háromszöget két egyenlő területű részre osztja.



ELMÉLET

Magasságtétel

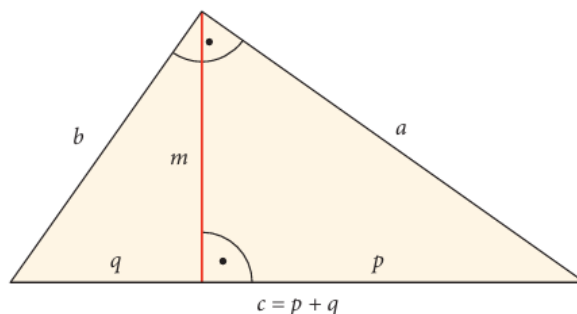
A derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két szakaszra osztja, és az átfogóhoz tartozó magasság hossza a két szelet hosszának mértani közepe. Az ábra jelölései szerint: $m = \sqrt{pq}$.

Befogótétel

A derékszögű háromszög bármelyik befogójának hossza az átfogó hosszának és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának mértani közepe.

Az ábra jelölései szerint: $a = \sqrt{pc}$ és $b = \sqrt{qc}$.

A tételek bizonyításához az ábrán látható derékszögű háromszögek hasonlóságát használhatjuk fel.



RÁADÁS

Számtani és mértani közép összehasonlítása geometriai úton

Tétel: Két pozitív valós szám mértani közepe legfeljebb akkora, mint ugyanezen két szám számtani közepe.

Bizonyítás:

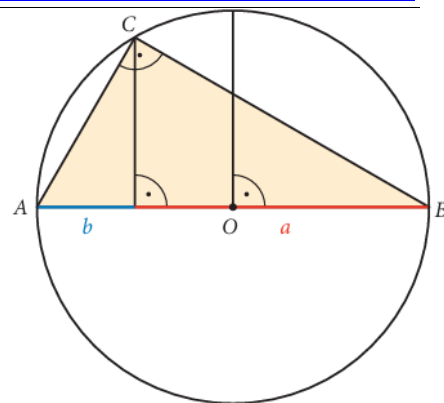
Ha egy derékszögű háromszög esetében a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek hossza a és b , akkor

- az átfogó hossza $a + b$, ami egyenlő a háromszög köré írható körének átmérőjével. $\frac{a+b}{2}$ tehát egyenlő a köré írható kör sugarával.

- a derékszögű háromszögre fennálló magasságtétel értelmében az átfogóhoz tartozó magasság hossza $\sqrt{a \cdot b}$.

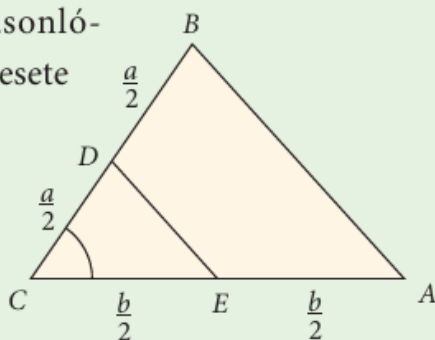
Az ábráról leolvasható, hogy az átfogóhoz tartozó magasság hossza kisebb vagy egyenlő, mint a háromszög köré írt kör sugara. Vagyis $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a és b egyenlő, azaz a háromszög egyenlő szárú.

Ezzel geometriai úton bebizonyítottuk a kimondott tételt.



FELADATOK

- 1.** A háromszögek hasonlóságának egyik alapesete megmutatja, hogy $ABC\triangle \sim EDC\triangle$.



- Melyik ez az alapeset?
- Melyek itt az egymásnak megfelelő csúcsok?
- Mennyi a hasonlóság aránya?
- Mi következik ebből az AB és a DE szakasz állására és hosszúságára vonatkozóan?
- A DE szakasz az $ABC\triangle$ két oldalának a felezőpontját köti össze. Mi a neve az ilyen tulajdonságú szakasznak?

Megoldás:

- a) Melyik ez az alapeset?

Válasz:

A háromszögek hasonlóságának azon alapesetéről van szó, amely kimondja, hogy ha két háromszögben két-két oldalpár aránya megegyezik, és az általuk közbezárt szög egyenlő, akkor a két háromszög hasonló.

Indoklás az ábra alapján:

- A C csúcsnál lévő belső szög mindkét háromszögben közös, így a nagysága természetesen egyenlő: $\angle BCA = \angle ECD$.
- A szöget közrefogó oldalak aránya a kisebb háromszögből a nagyobb felé haladva:

$$\frac{CD}{CB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CE}{CA} = \frac{\frac{b}{2}}{b} = \frac{1}{2}$$

- b) Melyek itt az egymásnak megfelelő csúcsok?

Válasz:

A csúcsok megfeleltetését a hasonló oldalak és a közös szög határozzák meg:

- A közös szög csúcsa önmagának felel meg: $C \longleftrightarrow C$
- A rövidebb, a hosszúságú oldalon lévő felezőpont a nagy háromszög végpontjának felel meg: $D \longleftrightarrow B$
- A hosszabb, b hosszúságú oldalon lévő felezőpont a nagy háromszög végpontjának felel meg: $E \longleftrightarrow A$

c) Mennyi a hasonlóság aránya?

Válasz:

- Ha a kisebb $\triangle EDC$ háromszöget viszonyítjuk a nagyobb $\triangle ABC$ háromszöghöz (k_1):

$$k_1 = \frac{CD}{CB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} = 0,5$$

- Ha a nagyobb $\triangle ABC$ háromszöget viszonyítjuk a kisebb $\triangle EDC$ háromszöghöz (k_2):

$$k_2 = \frac{CB}{CD} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$$

d) Mi következik ebből az AB és a DE szakasz állására és hosszúságára vonatkozóan?

Válasz:

- Állásra vonatkozóan: A két szakasz **párhuzamos** egymással: **$DE \parallel AB$** .
(Mivel a hasonlóság miatt a megfelelő szögek egyenlők, így például $\angle CDE = \angle CBA$,
amik egyállású szögek, ez pedig egyenesen bizonyítja a párhuzamosságot.)
- Hosszúságra vonatkozóan:
A DE szakasz hossza pontosan **fele** az AB szakasz hosszának:

$$DE = \frac{1}{2}AB \quad (\text{vagy } AB = 2DE)$$

e) Mi a neve az ilyen tulajdonságú szakasznak?

Válasz:

A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakaszt a háromszög **középvonalának** nevezzük.

2  **a)** Egy háromszög három oldalhosszának aránya $2:8:9$, legrövidebb középvonalának hossza 17 mm. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát!

b) Az ABC háromszög középvonalai olyan háromszöget alkotnak, melynek kerülete 255 dm, és oldalainak aránya $5:12:13$. Határozd meg az ABC háromszög oldalainak hosszát! Szögei szerint milyen az ABC háromszög?

Megoldás:

a)

◦ Adatok:

Az oldalhosszak aránya: $a : b : c = 2 : 8 : 9$

A legrövidebb középvonal hossza: $q_{\min} = 17$ mm

◦ Levezetés:

A legrövidebb középvonal a legrövidebb oldallal (a) párhuzamos, így az a oldal hossza:

$$a = 2 \cdot q_{\min} = 2 \cdot 17 \text{ mm} = \mathbf{34 \text{ mm}}$$

Mivel az oldalak aránya $2 : 8 : 9$, az egységnyi arányossági tényező (x):

$$2x = 34 \implies x = 17 \text{ mm}$$

Ebből a hiányzó két oldal hossza:

$$b = 8 \cdot 17 \text{ mm} = \mathbf{136 \text{ mm}}$$

$$c = 9 \cdot 17 \text{ mm} = \mathbf{153 \text{ mm}}$$

◦ Végeredmény: A háromszög oldalai: **34 mm**, **136 mm** és **153 mm**.

b)

◦ Adatok:

A középvonal-háromszög kerülete: $K_{\text{közép}} = 255$ dm

Az oldalak aránya: $5 : 12 : 13$

◦ Levezetés:

A nagy $ABC\triangle$ kerülete pontosan kétszerese a belső középvonal-háromszögének:

$$K_{ABC} = 2 \cdot K_{\text{közép}} = 2 \cdot 255 \text{ dm} = \mathbf{510 \text{ dm}}$$

Az oldalak felosztása az arányszámok összege alapján ($5 + 12 + 13 = 30$):

$$30x = 510 \implies x = \frac{510}{30} = 17 \text{ dm}$$

Az $ABC\triangle$ oldalai:

$$a = 5 \cdot 17 \text{ dm} = \mathbf{85 \text{ dm}}$$

$$b = 12 \cdot 17 \text{ dm} = \mathbf{204 \text{ dm}}$$

$$c = 13 \cdot 17 \text{ dm} = \mathbf{221 \text{ dm}}$$

Szögek szerinti meghatározáshoz ellenőrizzük a Pitagorasz-tételt ($85^2 + 204^2 \stackrel{?}{=} 221^2$):

$$7225 + 41616 = 48841$$

$$48841 = 48841$$

◦ Végeredmény:

Az oldalak **85 dm**, **204 dm**, 221 dm, a háromszög pedig a tétel miatt **derékszögű**.

- 3** A mellékelt ábrán $AB \parallel DE$. A háromszögek hasonlóságának egyik alapesete megmutatja, hogy $ABS\triangle \sim DES\triangle$.

a) Melyik ez az alapeset?

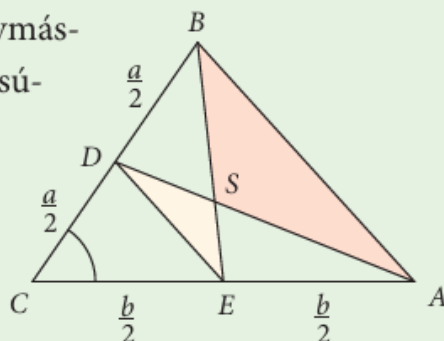
b) Melyek itt az egymásnak megfelelő csúcsok?

c) Mennyi a hasonlóság aránya?

d) Mennyi az AS és a DS szakasz hosszúságának az aránya?

e) Mennyi a BS és az ES szakasz hosszúságának az aránya?

f) Az AD szakasz is és a BE szakasz is az $ABC\triangle$ egyik csúcsát és a vele szemközti oldal felezőpontját köti össze. Mi a neve az ilyen tulajdonságú szakasznak?



Megoldás:

a) Melyik ez az alapeset?

- Válasz: A két-két szög megegyezése (szög-szög eset).
- Indoklás:
A feladat megadja, hogy az AB és DE szakaszok párhuzamosak: $AB \parallel DE$.
Két párhuzamos egyenest metsző egyenesek mentén egyenlő nagyságú váltószögek keletkeznek:

$$\angle ABS = \angle DES \quad \text{és} \quad \angle BAS = \angle EDS$$

Emellett az S csúcsnál lévő belső szögek egymás csúcsszögei, így szintén egyenlők: $\angle ASB = \angle DSE$.

Mivel a két háromszög minden szöge megegyezik, ezért hasonlóak egymáshoz.

b) Melyek itt az egymásnak megfelelő csúcsok?

- Válasz:
Az egyenlő váltószögek és a közös csúcsszög alapján a pontos megfeleltetés:

$$A \longleftrightarrow D, \quad B \longleftrightarrow E, \quad S \longleftrightarrow S$$

c) Mennyi a hasonlóság aránya?

- Válasz:
Az ábra adatai alapján a D és E pontok az $ABC\triangle$ oldalfelező pontjai, mivel a száracat $\frac{a}{2} - \frac{a}{2}$, illetve $\frac{b}{2} - \frac{b}{2}$ részekre osztják.
Ezért a DE szakasz a nagy háromszög egyik **középvonala**, amelynek hossza pontosan fele a vele párhuzamos AB oldalnak: $DE = \frac{1}{2}AB$.
- Ha a kisebb $DES\triangle$ -t viszonyítjuk a nagyobb $ABS\triangle$ -hez: $k_1 = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2} = 0,5$.
- Ha a nagyobb $ABS\triangle$ -t viszonyítjuk a kisebb $DES\triangle$ -hez: $k_2 = \frac{AB}{DE} = 2$.

d) Mennyi az AS és a DS szakasz hosszúságának az aránya?

◦ Válasz:

Mivel a két háromszög hasonlósági aránya a nagyobb felől nézve 2, a megfelelő oldalaik aránya is pontosan 2 lesz:

$$\frac{AS}{DS} = 2 \quad (\text{azaz } AS : DS = 2 : 1)$$

e) Mennyi a BS és az ES szakasz hosszúságának az aránya?

◦ Válasz:

A d) ponthoz hasonlóan, a hasonlóság miatt a másik egymásnak megfelelő szakaszon is ugyanez az arányosság érvényesül:

$$\frac{BS}{ES} = 2 \quad (\text{azaz } BS : ES = 2 : 1)$$

f) Mi a neve az ilyen tulajdonságú szakasznak?

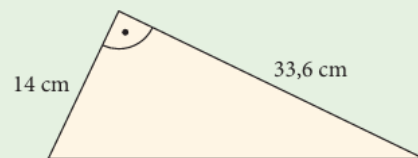
◦ Válasz:

Azokat a szakaszokat, amelyek a háromszög csúcsait a szemközti oldal felezőpontjával kötik össze (mint itt az AE és BD szakaszok meghosszabbításai), **súlyvonalaknak** nevezzük.

Megjegyzés: A metszéspontjuk (az S pont) a háromszög **súlypontja**. A levezetés matematikailag is bebizonyította azt a jól ismert tételt, hogy a súlypont a súlyvonalat mindig 2 : 1 arányban osztja ketté, a csúcstól számítva.

4 Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 14 cm és 33,6 cm.

- Mekkorák a háromszög középvonalai?
- Mekkora az átfogóhoz tartozó súlyvonal hossza?
- Mekkora a befogókhoz tartozó súlyvonalak hossza?
- Mekkora távolságra van a háromszög súlypontja a háromszög csúcsaitól?



Megoldás:

A feladat egy derékszögű háromszögről szól, amelynek megadták a két befogóját:

$$a = 14 \text{ cm}, \quad b = 33,6 \text{ cm}$$

Mielőtt az alponatokra válaszolnánk, a **Pitagorasz-tétel** segítségével számítsuk ki a háromszög átfogójának (c) hosszát:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 14^2 + 33,6^2 = 196 + 1128,96 = 1324,96$$

$$c = \sqrt{1324,96} = 36,6 \text{ cm}$$

a) Mekkora a háromszög középvonalai?

A háromszög középvonalai összekötik az oldalfelező pontokat, és hosszuk pontosan fele a velük párhuzamos oldalakénak.

- Az a oldallal párhuzamos középvonal:

$$f_a = \frac{a}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

- A b oldallal párhuzamos középvonal:

$$f_b = \frac{b}{2} = \frac{33,6}{2} = 16,8 \text{ cm}$$

- A c (átfogó) oldallal párhuzamos középvonal:

$$f_c = \frac{c}{2} = \frac{36,6}{2} = 18,3 \text{ cm}$$

Végeredmény: A háromszög középvonalai **7 cm**, **16,8 cm** és **18,3 cm** hosszúak.

b) Mekkora az átfogóhoz tartozó súlyvonal hossza?

Derékszögű háromszögben érvényes Thálész tétele, mely szerint a háromszög köré írható kör középpontja éppen az átfogó felezőpontja. Emiatt az átfogóhoz tartozó súlyvonal (s_c) hossza megegyezik a köré írható kör sugarával (R), ami pontosan az átfogó fele:

$$s_c = R = \frac{c}{2} = \frac{36,6}{2} = 18,3 \text{ cm}$$

Végeredmény: Az átfogóhoz tartozó súlyvonal hossza **18,3 cm**.

c) Mekkora a befogókhoz tartozó súlyvonalak hossza?

A befogókhoz tartozó súlyvonalak (s_a és s_b) hosszát olyan derékszögű háromszögekből számíthatjuk ki a Pitagorasz-tétellel, ahol az egyik belső befogó változatlan, a másik pedig megfeleződik.

$$s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$$

$$s_a^2 = 7^2 + 33,6^2 = 49 + 1128,96 = 1177,96$$

$$s_a = \sqrt{1177,96} = \mathbf{34,32 \text{ cm}}$$

$$s_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$s_b^2 = 14^2 + 16,8^2 = 196 + 282,24 = 478,24$$

$$s_b = \sqrt{478,24} = \mathbf{21,87 \text{ cm}}$$

Végeredmény: A befogókhoz tartozó súlyvonalak hossza kerekítve **34,32 cm** és **21,87 cm**.

d) Mekkora távolságra van a háromszög súlypontja a háromszög csúcsaitól?

A háromszög súlypontja (S) a súlyvonalakat 2 :

1 arányban osztja két részre úgy, hogy a hosszabbik

darab esik a csúcs felőli oldalra. Tehát a súlypont és a csúcsok távolsága a mindenkor teljes súlyvonal hosszának pontosan a $\frac{2}{3}$ része.

- **A derékszögű csúcsot jelentő C csúctól való távolság:**

$$d_C = \frac{2}{3} \cdot s_c = \frac{2}{3} \cdot 18,3 = \mathbf{12,2 \text{ cm}}$$

- **Annak az A csúcsnak a távolsága, amellyel szemben az a oldal van:**

$$d_A = \frac{2}{3} \cdot s_a = \frac{2}{3} \cdot 34,32 = \mathbf{22,88 \text{ cm}}$$

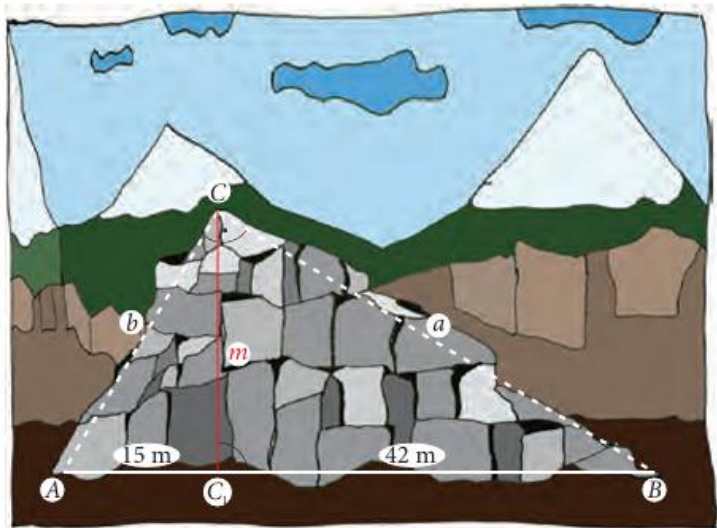
- **Annak a B csúcsnak a távolsága, amellyel szemben a b oldal van:**

$$d_B = \frac{2}{3} \cdot s_b = \frac{2}{3} \cdot 21,87 = \mathbf{14,58 \text{ cm}}$$

Végeredmény: A súlypont a csúcsoktól mérve **12,2 cm**, **22,88 cm** és **14,58 cm** távolságra van.

Egy szikla csúcsa nehezen közelíthető meg, ám alkalmas távolságok mérésével kielégítő becslés adható a magasságára.

Számítsuk ki, mekkora a CC_1 magasság, ha ismert az AC_1 és a BC_1 szakaszok hossza, és tudjuk, hogy az AC oldal mérőleges a BC oldalra!



Megoldás

Az ábrán három derékszögű háromszög látható: ABC , AC_1C és C_1BC .

A két utóbbi háromszögre írjuk fel a Pitagorasz-tételt:

$$b^2 = m^2 + 15^2 \quad \text{és} \quad a^2 = m^2 + 42^2.$$

Az ABC háromszögre pedig:

$$a^2 + b^2 = (42 + 15)^2$$

$$\text{ebből } (m^2 + 42^2) + (m^2 + 15^2) = (42 + 15)^2$$

$$2m^2 + 42^2 + 15^2 = 42^2 + 2 \cdot 42 \cdot 15 + 15^2$$

$$m^2 = 42 \cdot 15$$

$$m = \sqrt{42 \cdot 15} \approx 25,1 \text{ (m)}$$

Általánosságban is belátható, hogy a derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság négyzete egyenlő az átfogó két szeletének (vagyis a befogók átfogóra eső mérőleges vetületének) a szorzatával, másként: az átfogóhoz tartozó magasság az átfogó két szeletének a mértani közepe.